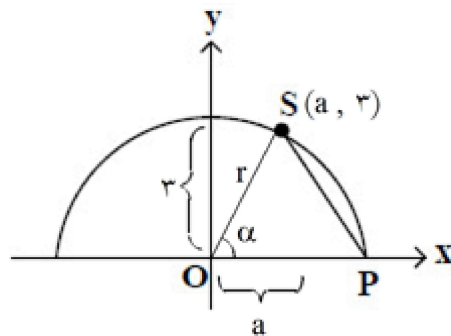


$$OS = OP = \text{شعاع} = \text{وتر} \Rightarrow \triangle OSP \text{ متساوی الاضلاع} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱



$$SH = r \sin \alpha$$

$$\Rightarrow r = r \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = 2\sqrt{3}$$

$$a = r \cos \alpha = 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در مثلث ABC داریم: ۲

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times BC \times \sin \hat{B}$$

$$S = \frac{1}{2} \times x \times BC \times \sin \hat{C}$$

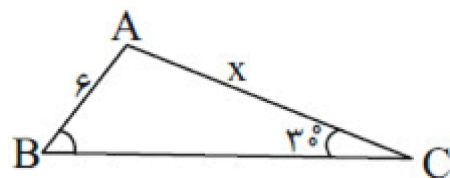
$$\Rightarrow \frac{x}{\sin B} = \frac{6}{\sin 30^\circ} = 12 \Rightarrow \sin B = \frac{x}{12}$$

$$6 < x < 9/6 \xrightarrow{\div 12} \frac{1}{2} < \frac{x}{6} < \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} < \sin B < \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} < \sin^2 B < \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{-9}{16} < -\sin^2 B < \frac{-1}{4} \xrightarrow{+1} \frac{7}{16} < 1 - \sin^2 B < \frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{7}{16}, b = \frac{3}{4}$$

$$\cos^2 B$$

$$\Rightarrow a + b = \frac{7}{16} + \frac{3}{4} = \frac{36 + 72}{144} = \frac{108}{144} = 3/4$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۳

$$\sqrt{(x+1)^2} + 2\sqrt{(x+1)^2} = x+1 + 2|x+1| = x+1 - 2(x+1) = -x-1$$

$$\text{الف) } \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}$$

$$\text{ب) } \frac{6}{\sqrt{7}-1} \times \frac{(\sqrt{49}+\sqrt{7}+1)}{(\sqrt{49}+\sqrt{7}+1)} = \frac{6(\sqrt{49}+\sqrt{7}+1)}{7-1} = \sqrt{49} + \sqrt{7} + 1$$

$$\sqrt{27} < \sqrt{35} < \sqrt{64} \Rightarrow \sqrt{3^2} < \sqrt{35} < \sqrt{4^2} \Rightarrow 3 < \sqrt{35} < 4$$

$$\sqrt{-243} < \sqrt{-60} < \sqrt{-32} \Rightarrow \sqrt{-3^5} < \sqrt{-60} < \sqrt{-2^5} \Rightarrow -3 < \sqrt{-60} < -2$$

۵

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad & (-\sqrt[3]{360})(5\sqrt[3]{75}) = -5\sqrt[3]{360 \times 75} = -5\sqrt[3]{2^3 \times 3^2 \times 5 \times 5^2 \times 3} \\ & = -5\sqrt[3]{2^3 \times 3^3 \times 5^3} = -5 \times 2 \times 3 \times 5 = -150. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب)} \quad & \sqrt[3]{135} + 3\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{300} - \sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{27 \times 5} + 3\sqrt[3]{9 \times 3} - \sqrt[3]{100 \times 3} - \sqrt[3]{8 \times 5} \\ & = 3\sqrt[3]{5} + 9\sqrt[3]{3} - 10\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3} \end{aligned}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{-x} + x > 0 \Rightarrow x < 0 \quad (B \text{ یا } A) \Rightarrow \sqrt{-x} > -x \Rightarrow -x > x^2 \Rightarrow x^2 + x < 0$$

$$\Rightarrow -1 < x < 0 \Rightarrow B \text{ جواب}$$

$$x - \sqrt{x} > 0 \Rightarrow x > 0 \quad (D \text{ یا } C) \Rightarrow x > \sqrt{x} \Rightarrow x^2 > x \Rightarrow x^2 - x > 0$$

$$\Rightarrow x < 0 \text{ یا } x > 1 \Rightarrow D \text{ جواب}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. طرفین نامساوی در عدد مثبت x ضرب شود.

$$0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^2 < x \Rightarrow 0 < x^3 < x^2 \Rightarrow 0 < x^4 < x^3$$

در نتیجه $x < x^2 < x^3 < x^4$ کمترین مقدار x^4 می‌باشد.

همچنین می‌توان به جای x یک عدد بین صفر و یک قرار داد و امتحان کرد.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 < \left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^1$$

مثلاً عدد $\frac{1}{2}$ ، به راحتی قابل مشاهده است:

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{9a}}{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{a^2}} &= \frac{(9a)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{3}\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{2}{3}} \times \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{3} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{3} \times (3^{-2})^{\frac{1}{3}}} \\ &= \frac{3^{\frac{1}{3}} \times (3^{-2})^{\frac{4}{3}}}{(3^{1-6})^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{1}{3}} \times 3^{-\frac{8}{3}}}{3^{-\frac{5}{3}}} = \frac{3^{\frac{1}{3}-\frac{8}{3}}}{3^{-\frac{5}{3}}} = 3^{-\frac{7}{3}+\frac{5}{3}} = 3^{\frac{-9+25}{15}} = 3^{\frac{16}{15}} = 3^1 \frac{1}{15} \\ &= 3 \times 3^{\frac{1}{15}} = 3\sqrt[15]{3} \end{aligned}$$

$$8x^3 + 125y^3 = (2x + 5y)(4x^2 - 10xy + 25y^2)$$

الف)

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}{x - y}$$

ب)

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

روش اول: دو طرف تساوی را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin x \cancel{\cos x}}{\cos^2 x} &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ \Rightarrow \tan^2 x + \tan x &= 1 + \tan^2 x \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = 45^\circ \end{aligned}$$

روش دوم: گزینه‌ها را چک می‌کنیم، فقط $x = 45^\circ$ صدق می‌کند.

۱۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\sin x - \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \cos x \Rightarrow \tan x = -\frac{1}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$$

۱۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا رادیکال‌ها را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{6} &= \sqrt[3]{2 \times 5^3} - \sqrt[3]{2^3} = 5\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2} = 2^2 \times \sqrt[3]{2} \\ \sqrt[3]{2^6 \times 2} &= \sqrt[3]{2^7} \\ \sqrt[3]{\sqrt[3]{2^7}} &= \sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

حال باید ریشه‌ی هفتم بگیریم:

۱۴ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} &= 5^{\frac{1}{10}} \Rightarrow x^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{5}} \Rightarrow x^{\frac{10}{3}} = 5^{\frac{2}{3}} \\ \xrightarrow{\text{به توان } 10} x^{\frac{10}{3}} &= 5^{\frac{2}{3}} \Rightarrow (x^{\frac{10}{3}})^{\frac{3}{10}} = 5^{\frac{2}{3} \times \frac{3}{10}} \Rightarrow x^{\frac{10}{3} \times \frac{3}{10}} = 5^{\frac{2}{10}} \xrightarrow{x > 0} x = \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{x^2})^2 + 1 &= (\sqrt{x^2} + 1)(\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2} + 1) \\ x^2 + 1 &= (\sqrt{x^2} + 1)(\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2} + 1) \end{aligned}$$

۱۵

۱۶

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \frac{2}{3} + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

۱۷

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} \Rightarrow \cot \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

۱۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا صورت سوال را با اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$(\sqrt{x^2})^2 - 1 = (\sqrt{x^2})^2 - 1 = ((\sqrt{x^2})^2 - 1)((\sqrt{x^2})^2 + 1)$$

حال هر عبارت را جداگانه به کمک اتحاد چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم.

$$(\sqrt{x^2} - 1)(\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2} + 1)(\sqrt{x^2} + 1)(\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2} + 1)$$

پس عبارت گزینه «۲» در این تجزیه وجود ندارد.

۱۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$x^2 - x + 3xy - 3y = x(x - 1) + 3y(x - 1) = (x - 1)(x + 3y)$$

$$x^2 + 2\sqrt{y}^2 + x^2 + 2\sqrt{xy}^2 = x^2 + 2\sqrt{y}^2 + x(x^2 + 2\sqrt{y}^2) = (x^2 + 2\sqrt{y}^2)(1 + x)$$

$$\xrightarrow{\text{چاق و لاغر}} (x + 3y)(x^2 + 9y^2 - 3xy)(x + 1)$$

بنابراین عامل مشترک این دو عبارت، $(x + 3y)$ است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۰

$$x - y = 2 \Rightarrow y = x - 2 \Rightarrow \text{شیب خط: } m = 1 \Rightarrow \tan \theta = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل و فرض سؤال داریم: ۲۱

$$\left. \begin{array}{l} DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \\ DC \parallel BF \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AF} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AC}{AF}$$

$$AC^2 = AE \cdot AF \quad (*)$$

همچنین طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC ($DE \parallel BC$) داریم:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{6}{10} \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \begin{cases} AE = 3t \\ AC = 5t \end{cases}$$

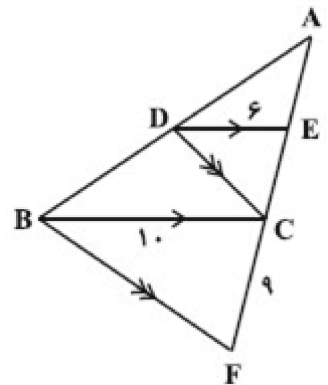
$$\xrightarrow{(*)} (5t)^2 = 3t(5t + 9) \Rightarrow 25t^2 = 15t^2 + 27t$$

در نتیجه:

$$\Rightarrow 10t^2 = 27t \xrightarrow{t \neq 0} t = 2/7$$

$$5t = 5 \times 2/7 = 10/7$$

طول ضلع AC برابر می‌شود با:



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با رسم ارتفاع EH وارد بر وتر AD در مثلث قائم‌الزاویه AED و روابط ناشی از تشابه و مساحت در مثلث قائم‌الزاویه داریم: ۲۲

$$EH^2 = EB \times EC$$

$$EH^2 = 24 \times 54 \Rightarrow EH = 36 = AB$$

$$S_{ABCD} = AB \times BC = (24 + 54) \times 36 = 2808$$

$$EF \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{x}{3} = \frac{12}{x} \Rightarrow x = 6$$

$$EF \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{x+1}{y} = \frac{x}{x+3} \xrightarrow{x=6} \frac{7}{y} = \frac{6}{9} \Rightarrow y = 10/5$$

$$\text{محیط دوزنقه} = 3 + 7 + 6 + 10/5 = 26/5$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۳

۲۴

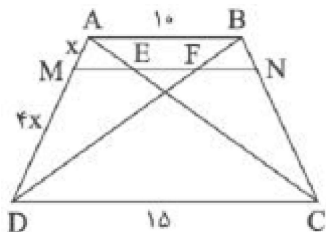
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. به کمک تعمیم قضیه تالس داریم:

$$\frac{4}{4+DB} = \frac{5}{5+EC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{4}{4+DB} = \frac{5}{5+EC} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow DB = 8, EC = 10$$

$$\Rightarrow DB + EC = 8 + 10 = 18$$

۲۵

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به فرض سؤال، $MN \parallel AB \parallel CD$ است. از تالس کمک می‌گیریم:

$$\triangle ADC : ME \parallel CD \Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{ME}{DC} \Rightarrow \frac{x}{4x} = \frac{ME}{15} \Rightarrow ME = 3$$

$$\triangle ADB : MF \parallel AB \Rightarrow \frac{DM}{DA} = \frac{MF}{AB} \Rightarrow \frac{4x}{4x} = \frac{MF}{10} \Rightarrow MF = 8$$

طول EF برابر است با:

$$EF = MF - ME = 8 - 3 = 5$$

۲۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در مثلث قائم‌الزاویه ABC می‌دانیم:

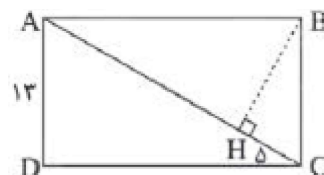
$$BC^2 = CH \times AC \Rightarrow (13)^2 = 5 \times AC \Rightarrow AC = \frac{169}{5}$$

$$AH = AC - CH = \frac{169}{5} - 5 = \frac{144}{5}$$

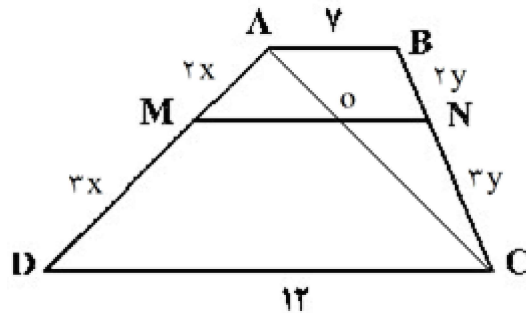
$$AB^2 = AH \times AC \Rightarrow (AB)^2 = \left(\frac{144}{5}\right) \left(\frac{169}{5}\right) \Rightarrow AB = \frac{12 \times 13}{5}$$

در نهایت $AB + AH$ را به دست می‌آوریم:

$$AB + AH = \frac{12 \times 13}{5} + \frac{144}{5} = 60$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بنابر فرض $\frac{MA}{MD} = \frac{2}{3}$ در نظر می‌گیریم $MA = 2x$ و $MD = 3x$. پس بنابر قضیه‌ی تالس در ذوزنقه نتیجه می‌گیریم $BN = 2y$, $CN = 3y$. حال قطر AC را رسم می‌کنیم تا MN را در نقطه‌ی O قطع کند. بنابر قضیه تالس می‌نویسیم:



$$\triangle ADC : OM \parallel DC \Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{OM}{DC} \Rightarrow \frac{2x}{5x} = \frac{OM}{12} \Rightarrow OM = \frac{24}{5}$$

$$\triangle ABC : ON \parallel AB \Rightarrow \frac{CN}{CB} = \frac{ON}{AB} \Rightarrow \frac{3y}{5y} = \frac{ON}{7} \Rightarrow ON = \frac{21}{5}$$

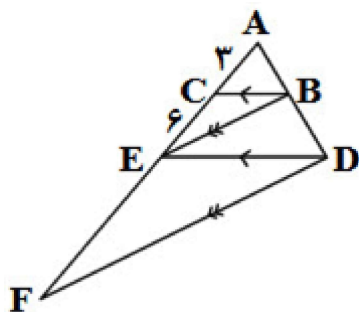
$$MN = OM + ON = \frac{24}{5} + \frac{21}{5} = \frac{45}{5} = 9 \quad \text{بنابراین:}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} \frac{z}{y} = \frac{a}{a+b} \\ \frac{z}{x} = \frac{b}{a+b} \end{cases} \Rightarrow \frac{z}{y} + \frac{z}{x} = \frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+b}$$

$$z \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{a+b}{a+b} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \quad \text{در نتیجه:}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. راه حل اول:



$$\begin{cases} \triangle ADE : BC \parallel DE \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} \\ \triangle ADF : BE \parallel DF \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{BE}{DF} = \frac{AB}{AD} \end{cases} \Rightarrow \frac{BE}{DF} = \frac{AC}{AE} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

راه حل دوم:

ابتدا طول EF به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \triangle ADE : BC \parallel DE \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} \\ \triangle ADF : BE \parallel DF \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AD} \end{cases} \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{AE}{AF}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{9} = \frac{9}{9 + EF} \Rightarrow 3(9 + x) = 9 \times 9 \Rightarrow 9 + x = 27 \Rightarrow x = 18$$

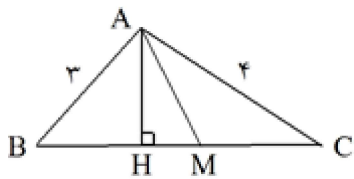
$$\frac{BE}{DF} = \frac{AE}{AF} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

بنابراین در مثلث ADF داریم:

۳۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مثلث ABC به اضلاع ۳، ۴ و ۵ در رأس A قائم‌الزاویه است، میانه‌ی وتر نصف وتر است، پس: $AM = BM = MC = \frac{5}{2}$.

از طرفی بنا به رابطه‌ی طولی در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC داریم:



$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 3^2 = BH \times 5 \Rightarrow BH = \frac{9}{5}$$

$$MH = BM - BH = \frac{5}{2} - \frac{9}{5} = \frac{25-18}{10} = \frac{7}{10} = 0.7$$

۳۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. کار کل در مسیر AB برابر است با:

$$W_{tAB} = \Delta K_{AB} \Rightarrow W_{tAB} = \frac{1}{2} m (v^2 - v^2) \Rightarrow W_{tAB} = \frac{3}{2} m v^2$$

کل در مسیر BC برابر است با:

$$W_{tBC} = \Delta K_{BC} \Rightarrow W_{tBC} = \frac{1}{2} m (0 - v^2) \Rightarrow W_{tBC} = -\frac{4}{2} m v^2$$

$$\frac{W_{tAB}}{W_{tBC}} = \frac{\frac{3}{2} m v^2}{-\frac{4}{2} m v^2} = -\frac{3}{4} \quad \text{نسبت } \frac{W_{tAB}}{W_{tBC}} \text{ خواسته شده است:}$$

۳۲

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به رابطه $K = \frac{1}{2} m v^2$ برای انرژی جنبشی، داریم:

$$K_1 = \frac{1}{2} m v^2 \xrightarrow{\text{تندی جسم } \frac{m}{s} \text{ افزایش یابد}} K_2 = \frac{1}{2} m (v + 4)^2$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m v^2 \xrightarrow{\text{تندی جسم } \frac{m}{s} \text{ کاهش یابد}} K_3 = \frac{1}{2} m (v - 4)^2$$

$$K_1 = \sqrt{K_2 \times K_3} \xrightarrow{\text{تندی جسم } \frac{m}{s} \text{ افزایش یابد}} \frac{1}{2} m v^2 = \sqrt{\frac{1}{2} m (v + 4)^2 \times \frac{1}{2} m (v - 4)^2} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$= \frac{1}{2} m (v + 4) |v - 4| \Rightarrow v^2 = (v + 4) |v - 4|$$

$$0 \leq v \leq 4 \frac{m}{s} : v^2 = -v^2 + 2v + 16 \Rightarrow v^2 - v - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (v - 4)(v + 3) = 0 \Rightarrow v = 4 \frac{m}{s}, v = -3 \frac{m}{s}$$

$$v > 4 \frac{m}{s} : v^2 = v^2 - 2v - 16 \Rightarrow v = -12 \frac{m}{s}$$

۳۳

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا تندی حرکت جسم را در هر دو حالت محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{v}_1 = 6 \vec{i} + 8 \vec{j} \Rightarrow v_1 = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \frac{m}{s}$$

$$\vec{v}_2 = 12 \vec{i} - 5 \vec{j} \Rightarrow v_2 = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = 13 \frac{m}{s}$$

با استفاده از قضیه‌ی کار و انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta K = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \times 2 \times (13^2 - 10^2) = +69 \text{ J}$$

۳۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طبق قضیه کار - انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_{F_1} + W_{F_2} = K_2 - K_1 \Rightarrow F_1 d \cos 0^\circ + W_{F_2} = K_2 - K_1$$

$$\xrightarrow{K_1=0} 20 \times 8 \times 1 + W_{F_2} = 120 \Rightarrow W_{F_2} = -40 J \Rightarrow F_2 \times 8 \times \cos 180^\circ$$

$$\xrightarrow{K_2=120J} \Rightarrow F_2 = 5 N$$

با توجه به منفی بودن کار نیروی F_2 نتیجه می‌گیریم این نیرو خلاف جهت حرکت جسم است.

۳۵

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم هنگامی که آسانسور به سمت بالا حرکت می‌کند، کار نیروی $\vec{F}_N$ مثبت و کارنیروی mg منفی می‌باشد. زیرا جابه‌جایی آسانسور با جهت نیروی $\vec{F}_N$ موافق و با جهت نیروی $m\vec{g}$ مخالف است.

$$\Delta h = d = v \times t = 3 \times 2 = 6 m$$

ابتدا جابه‌جایی آسانسور در این مدت محاسبه می‌کنیم:

کار نیروی وزن در این مدت برابر است با:

$$W_{mg} = -mg\Delta h = -(75 \times 10) \times 6 = -4500 J$$

طبق قضیه کار - انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta K \xrightarrow{v=\text{ثابت}}_{\Delta K=0} W_{mg} + W_{F_N} = 0 \Rightarrow W_{F_N} = -(W_{mg}) \Rightarrow W_{F_N} = 4500 J$$

۳۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به قضیه کار - انرژی جنبشی، می‌توان نوشت:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_{mg} + W_{\text{موتور}} + W_{f_k} = \Delta K \Rightarrow -mg\Delta h + W_{\text{موتور}} + W_{f_k} = \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2)$$

$$\Rightarrow -4000 \times 10 \times 2 + W_{\text{موتور}} + (-5000) = \frac{1}{2}(400)(15^2 - 10^2)$$

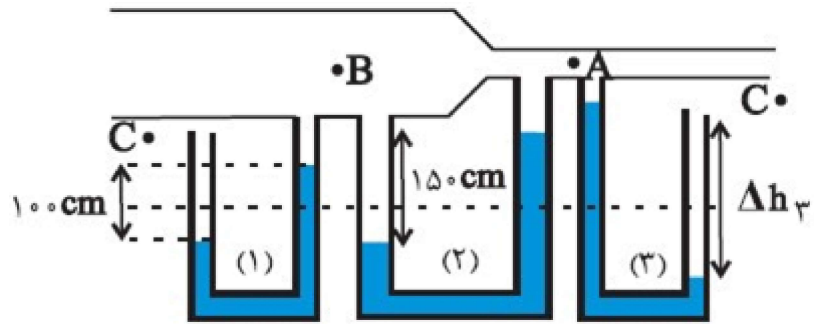
$$\Rightarrow -8000 + W_{\text{موتور}} + (-5000) = 25000 \Rightarrow W_{\text{موتور}} = 38 \times 10^3 J = 38 kJ$$

۳۷

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$W_T = \Delta K \Rightarrow W_{mg} + W_{FD} = \frac{1}{2}m(V_2^2 - V_1^2) \Rightarrow (100 \times 10 \times 500) + W_{FD}$$

$$= \frac{1}{2} \times 100((4/5)^2 - (1/5)^2) \Rightarrow W_{FD} = -499/1 kJ$$



قبل از دمیدن در لوله افقی $P_A = P_B = P_C$ است. با دمیدن در لوله افقی تندی هوا نسبت به هوای بیرون افزایش می‌یابد و باعث کاهش فشار می‌شود ($P_C > P_B$) و می‌دانیم که هر چه سطح مقطع لوله کوچک‌تر شود، تندی هوا در آن بیش‌تر شده و فشار هوا کمتر خواهد شد ($P_B > P_A$) پس در مجموع داریم:

$$P_C > P_B > P_A$$

این اختلاف فشارها باعث اختلاف ارتفاع مایع در لوله‌های U شکل می‌شود:

$$\Delta P = \rho g \Delta h$$

لوله U شکل (۱): چون $P_C > P_B$ است، مایع در شاخه راست بالا می‌رود:

$$P_C - P_B = \rho g \Delta h_1 \Rightarrow P_C - P_B = \rho g \times 100 \quad (۱)$$

لوله U شکل (۲): چون $P_B > P_A$ است، پس مایع در شاخه راست بالا می‌رود:

$$P_B - P_A = \rho g \Delta h_2 \Rightarrow P_B - P_A = \rho g \times 150 \quad (۲)$$

$$\text{حل دو معادله} \quad \begin{cases} P_C - P_B = \rho g \times 100 \\ P_B - P_A = \rho g \times 150 \end{cases}$$

$$P_C - P_A = \rho g \times 250 \Rightarrow \Delta h_3 = 250 \text{ cm}$$

و چون $P_C > P_A$ ، پس مایع در شاخه چپ بالا می‌رود.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نیروهای وارد بر جعبه عبارت‌اند از نیروی دست شخص و نیروی وزن. از آنجایی که در بخش‌های ابتدایی و انتهایی حرکت، جعبه به آرامی و با تندی ثابت جابه‌جا شده، نیروی دست شخص برابر نیروی وزن جعبه می‌باشد. از طرفی در بخش ابتدایی حرکت، جهت جابه‌جایی جعبه رو به بالا و در بخش انتهایی حرکت، جهت جابه‌جایی جعبه رو به پایین است، بنابراین:

$$(W_F)_1 = Fd \cos 0 = mgd = 10 \times 10 \times 1 = 100 \text{ J}$$

$$(W_F)_2 = Fd \cos 180^\circ = -mgd = -10 \times 10 \times 1 = -100 \text{ J}$$

طی حرکت افقی جعبه نیز کار ناشی از نیروی دست شخص صفر است، زیرا:

$$(W_F)_3 = Fd \cos 90^\circ = 0$$

بنابراین کار کل انجام شده توسط شخص روی جعبه برابر صفر خواهد بود:

$$W_t = 100 \text{ J} + 0 + (-100 \text{ J}) = 0$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. جهت نیروی شناوری وارد بر جسم در داخل یک شاره همواره به سمت بالا می‌باشد که دلیل این پدیده به بیش‌تر بودن فشار در قسمت پایین یک جسم غوطه‌ور در شاره نسبت به قسمت بالای آن است که باعث بیش‌تر بودن نیروی وارد بر جسم در قسمت پایین آن نسبت به قسمت بالای آن می‌شود.

۴۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طبق اصل ارشمیدس، چگالی سنج در مایع‌های چگال‌تر نسبت به مایع‌هایی با چگالی کمتر به میزان کمتری فرو خواهد رفت، بنابراین چون چگالی سنج در مایع B بیش‌تر فرو رفته است، چگالی مایع B کمتر از چگالی مایع A خواهد بود و طبق رابطه $\rho = \frac{m}{V}$ و با توجه به یکسان بودن جرم دو مایع، می‌توان نتیجه گرفت حجم کل مایع B نسبت به حجم کل مایع A بیش‌تر است.

$$\rho_A < \rho_B \Rightarrow V_B > V_A$$

از طرف دیگر چون چگالی سنج روی سطح دو مایع شناور می‌گردد، پس اندازه نیروی شناوری وارد به آن در هر دو حالت برابر با نیروی وزن چگالی سنج است. پس نیروی شناوری مایع B برابر با نیروی شناوری مایع A است.

نیروی شناوری وارد بر چگال سنج از طرف مایع A

$$\begin{array}{l} \text{چگال سنج} \quad mg = \rho_A V g = F_{bA} \\ \text{چگال سنج} \quad mg = \rho_B V g = F_{bB} \end{array} \quad \Rightarrow \quad F_{bA} = F_{bB}$$

۴۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از قضیه‌ی کار - انرژی و فرمول کار برای نیروی اصطکاک، می‌توان مسئله را حل کرد. ابتدا کار f_k را حساب می‌کنیم:

$$W_{f_k} = f_k d \cos 180^\circ = -f_k d \Rightarrow W_{f_k} = -40 f_k \quad (1)$$

حال از قضیه‌ی کار - انرژی داریم:

$$W_t = \Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv^2 = 0 - \frac{1}{2} \times 1000 \times 20^2 = -200000 J$$

$$W_N + W_{mg} + W_{f_k} + W_F = -200000 \quad (2) \quad \text{حال می‌نویسیم:}$$

$$0 + 0 + (-40 f_k) + 0 = -200000 \Rightarrow f_k = \frac{200000}{40} = 5000 N$$

از روابط ۱ و ۲ داریم:

$$\Rightarrow f_k = 5000 N$$

نکته: W_F به این دلیل صفر است که نیروی موتور ماشین هنگام ترمز برابر صفر است.

۴۳

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$K_1 = \frac{1}{2} \times 1 \times 10^2 = 50 J, K_2 = \frac{1}{2} \times 1/2 \times 9^2 = 0/6 \times 81 = 48/6 J$$

$$K_3 = \frac{1}{2} \times 1/4 \times 8^2 = 0/7 \times 64 = 44/8 J$$

$$K_4 = \frac{1}{2} \times 1/6 \times 7^2 = 0/8 \times 49 = 39/2 J$$

۴۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. جسم در مسیر BC به اندازه $R - R \cos 37^\circ$ بالا رفته است و اگر این ارتفاع را h بنامیم، خواهیم داشت:

$$h = R - R \cos 37^\circ = (2 - 2 \times 0/8)m = 0/4m$$

$$W = -mgh = (-2 \times 10 \times 0/4)J = -8J$$

۴۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای تبدیل فشار ناشی از وزن ستون یک مایع دلخواه به سانتی‌متر جیوه از $\rho_x h_x = \rho_{\text{Hg}} h_{\text{Hg}}$ استفاده می‌کنیم:

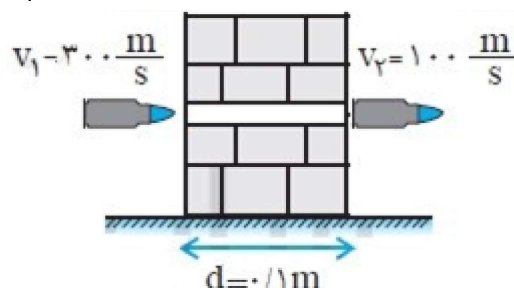
$$\rho_A h_A = \rho_{\text{Hg}} h_{\text{HgA}} \rightarrow \frac{1}{3} \times 24 = h_{\text{HgA}} \rightarrow h_{\text{HgA}} = 12 \text{ cm}$$

$$\rho_B h_B = \rho_{\text{Hg}} h_{\text{HgB}} \rightarrow \frac{1}{3} \times 18 = h_{\text{HgB}} \rightarrow h_{\text{HgB}} = 6 \text{ cm}$$

$$\rightarrow P = 12 + 6 = 18 \text{ cmHg}$$

۴۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تنها نیرویی که باعث کاهش تندی گلوله می‌شود، نیروی وارد از طریف دیوار بر گلوله است. با استفاده از قضیه کار - انرژی جنبشی داریم:



$$W_t = \Delta K = K_2 - K_1$$

$$\Rightarrow W_t = \frac{1}{2} m \left(v_2^2 - v_1^2 \right) \xrightarrow{m=20 \times 10^{-3} \text{ kg}, v_1=300 \frac{\text{m}}{\text{s}}, v_2=100 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

$$W_t = \frac{1}{2} \times 20 \times 10^{-3} \times ((100)^2 - (300)^2)$$

$$\Rightarrow W_t = 10^{-2} \times (10^4 - 9 \times 10^4) = 10^{-2} \times (-8) \times 10^4 = -800 \text{ J}$$

حال برای به‌دست آوردن نیروی متوسط دیوار با استفاده از تعریف کار نیروی ثابت داریم:

$$W_t = f d \cos \theta \xrightarrow{\theta=180^\circ, d=0.1 \text{ m}} -800 = f \times 0.1 \times (-1) \Rightarrow f = 8000 \text{ N} = 8 \text{ kN}$$

۴۷

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر قضیه کار - انرژی جنبشی را بین دو نقطه‌ی A و C نویسیم:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_{\text{mg}} + W_{f_k} = K_C - K_A$$

$$\Rightarrow -mgh - f_k d = \frac{1}{2} m v_C^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

$$\Rightarrow -2 \times 10 \times 3/3 - 5 \times 6 = \frac{1}{2} \times 2 \times v_C^2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 144$$

$$\Rightarrow v_C^2 = -66 - 30 + 144 = 48 \Rightarrow v_C = 4\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

توجه کنید که W_{mg} ، کار نیروی وزن از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی C است و بنابراین $h = 3/3 \text{ m}$ است. همچنین d برابر با

طول سطح شیب‌دار $\left(\frac{3}{\sin 30^\circ} = 6 \text{ m} \right)$ است.

۴۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{\frac{1}{2} m v_2^2}{\frac{1}{2} m v_1^2} \Rightarrow \frac{K_2}{0.40 \times 10^{-2}} = \left(\frac{1.8}{3.6} \right)^2 \Rightarrow K_2 = 3/6 \times 10^{-2} \text{ J} \xrightarrow{1 \text{ J} = 10^3 \text{ mJ}} 3/6 \times 10^1 \text{ mJ}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۴۹

$$W_t = \Delta K \Rightarrow \cancel{W_{وزن}} + \cancel{W_N} + W_{f_k} + W_F = K_f - \cancel{K_i} \Rightarrow W_{f_k} + Fd \cos 60^\circ = \frac{1}{2} m V_f^2 - 0$$

$$\Rightarrow W_{f_k} + 60 \times 20 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 4 \times 100 \Rightarrow W_{f_k} + 600 = 200 \Rightarrow W_{f_k} = -400 \text{ J}$$

$$W_{f_k} = f_k d \cos 180^\circ$$

$$\Rightarrow -400 = -f_k \times 20 \Rightarrow f_k = 20 \text{ N}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. کار کل انجام شده معادل مجموع کاری است که برای بالا کشیدن وزنه و کاری که برای بالا کشیدن طناب انجام می شود. ۵۰

$$W_{mg} = mg\Delta h = 15 \times 10 \times 15 = 2250 \text{ J}$$

$$W_{طناب} = W_{کل} - W_{وزنه} \Rightarrow W_{طناب} = 2812/5 - 2250 = 562/5 \text{ J}$$

طناب یک جسم همگن است بنابراین مرکز ثقل (گرانیگاه) آن در وسط طناب می باشد. بنابراین ارتفاعی که طناب جابه جا می شود برابر با $\frac{1}{2}m$ است.

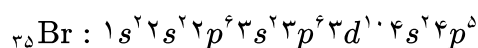
$$W_{طناب} = mg\Delta h_{طناب} \Rightarrow 562/5 = m \times 10 \times \frac{1}{2} \Rightarrow m = 1/5 \text{ kg}$$

اکنون با استفاده از یک تناسب ساده می توان جرم ۱ متر از طناب را به دست آورد:

L(m)	m(kg)
۱۵	۱/۵
۱	$x/5 \text{ kg} = 500 \text{ g}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. به جز عبارت سوم، سایر عبارتها درست هستند. بررسی عبارت ها: ۵۱

• سومین عنصر گروه ۱۷ همان Br بوده که شمار الکترون های با $l = 1$ یعنی زیرلایه p آن برابر با ۱۷ است:



• مطابق قاعده آفبا، زیرلایه $4s$ قبل از $4f$ الکترون می پذیرد و درستی این عبارت تأیید می شود.

• در جدول تناوبی در مجموع ۱۵ عنصر وجود دارد که شمار الکترون های موجود در زیرلایه s اتم آنها برابر با ۸ است. در

واقع این ۱۵ عنصر، تمام عنصرهای دوره چهارم به جز K ، Cr و Cu را شامل می شوند.

• اتم های A و B به ترتیب دارای ۱۲ و ۴ الکترون ظرفیتی هستند.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۵۲

(b) در واکنش تولید اتانول از اتن و آب، از H_2SO_4 به عنوان کاتالیزگر استفاده می شود.

(c) در واکنش هیدروژن دار کردن آلکان ها از فلز واسطه Ni به عنوان کاتالیزگر استفاده می شود.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. گاز Ar در مقایسه با He ، نقطه جوش بالاتر، درصد فراوانی کم تر در سیاره ی مشتری و ۵۳

درصد فراوانی بیشتری در هوای پاک و خشک لایه ی تروپوسفر دارد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. پس از آرگون، نئون فراوان ترین گاز نجیب موجود در هوای پاک و خشک است. ۵۴

۵۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. عبارت‌های آ و ب درست هستند. بررسی عبارت‌های نادرست:
(پ) اتمسفر زمین تا فاصله‌ی ۵۰۰ کیلومتری از سطح زمین امتداد یافته است.
(ت) میان کاهش فشار هوا در لایه‌ی تروپوسفر و ارتفاع از سطح زمین، چنین رابطه‌ای وجود ندارد.

۵۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. باران به دلیل وجود کربن دی‌اکسید محلول در آن، اندکی اسیدی و دارای pH کمتر از ۷ است.

۵۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است بررسی عبارت‌های نادرست:
(ب) مقایسه‌ی واکنش‌پذیری سه فلز آلومینیم، روی و آهن به صورت $Al > Zn > Fe$ است.

(ت) مقایسه‌ی شماره‌ی گروه سه عنصر آلومینیم، روی و آهن به صورت $Al > Zn > Fe$ است.
(۸) (۱۲) (۱۳)

۵۸

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. زنگ زدن وسایل آهنی و فولادی، سالانه هزینه‌های هنگفتی را به اقتصاد کشورها تحمیل می‌کند. فراموش نکنید که آلومینیم در برابر خوردگی مقاومت است.

۵۹

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دانشمندان با استفاده از بالون‌های هواشناسی، ماهواره‌ها، کشتی‌های اقیانوس‌پیما و گویچه‌های شناور در دریا که به حسگرهای دما مجهز هستند، پیوسته دمای کره‌ی زمین را در سرتاسر نقاط آن رصد می‌کنند.

۶۰

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. عبارت‌های آ و ت درست هستند. بررسی عبارت‌های نادرست:
(ب) هیدروژن به صورت ترکیب‌های گوناگون در طبیعت یافت می‌شود.
(پ) هیدروژن مانند سوخت‌های فسیلی می‌تواند با اکسیژن بسوزد و نور و گرما تولید کند.

۶۱

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. عنصرهای A، D، X و E به ترتیب N ، C ، O و S هستند. برای نام گذاری ترکیب‌های NO و CO از پیشوند «مونو» استفاده می‌شود.

۶۲

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ترتیب pH مواد موردنظر در دمای یکسان به صورت زیر است:
آب باتری خودرو > اسید معده > شربت معده > محلول لوله‌بازکن pH

۶۳

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بررسی سایر گزینه‌ها:
(۲) هلیوم موجود در گاز طبیعی به همراه سایر فراورده‌های سوختن، بدون مصرف وارد هواکره می‌شود.
(۳) هلیوم، دومین عنصر فراوان سیاره‌ی مشتری است.
(۴) متخصصان کشورمان تاکنون به جداسازی و تهیه‌ی هلیوم موفق نشده‌اند و هم‌چنان، هلیوم از دیگر کشورها وارد می‌شود.

۶۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بررسی عبارت‌ها:

(آ) نادرست - فراوان‌ترین عنصر تک‌اتمی موجود در هواکره، گاز آرگون است. در صورتی که از لامپ نئون در ساخت تابلوهای تبلیغاتی برای ایجاد نوشته‌های نورانی سرخ‌فام استفاده می‌شود.

(ب) درست - حدود ۷۵ درصد یا $\frac{3}{4}$ از جرم هواکره در نزدیک‌ترین لایه به زمین (تروپوسفر) قرار دارد. یعنی جرم بقیه‌ی

لایه‌های هواکره، در حدود ۲۵ درصد یا $\frac{1}{4}$ از جرم هواکره است. به این ترتیب درستی این عبارت بدیهی است.

(پ) نادرست - کم‌تر از یک درصد حجمی هوای پاک و خشک را گازهای نجیب تشکیل می‌دهند. مجموع درصدهای حجمی سه گاز N_2 ، O_2 و CO_2 در هوای پاک و خشک بیش‌تر از ۹۹ درصد است.

(ت) نادرست - فراوان‌ترین ترکیب سازنده‌ی هواکره، گاز CO_2 است که پس از گازهای N_2 ، O_2 و Ar در رتبه‌ی چهارم قرار دارد. O_2 ، N_2 و Ar عنصر محسوب می‌شوند، نه ترکیب!

۶۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بررسی عبارت‌ها:

(آ) نادرست - به ترکیب‌های یونی که تنها از دو عنصر ساخته شده باشد، ترکیب یونی دوتایی می‌گویند. بنابراین هر دو ترکیب کلسیم اکسید (CaO) و آلومینیم فلوئورید (AlF_3) جزو ترکیب‌های یونی دوتایی هستند.

(ب) نادرست - یون تک‌اتمی، کاتیون یا آنیونی است که تنها از یک اتم تشکیل شده باشد. برای نمونه یون O^{2-} با

این‌که از یک عنصر (اکسیژن) تشکیل شده است، اما یک یون تک‌اتمی محسوب نمی‌شود و دو اتمی است.

(پ) نادرست - از دست دادن یا گرفتن الکترون نشانه‌ای از رفتار شیمیایی اتم است.

(ت) نادرست - ترکیب‌های یونی از نظر الکتریکی خنثی هستند.

۶۶

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ترکیب یونی، ترکیبی خنثی است که از گردهمایی تعداد بسیار زیادی کاتیون و آنیون به وجود آمده است، به طوری که مقدار کل بارهای منفی و مثبت در آن با هم برابر است.

۶۷

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. هر چهار عبارت پیشنهاد شده نادرست هستند. بررسی عبارت‌ها:

(آ) حدود ۷۵ درصد از جرم هواکره مربوط به لایه‌ی تروپوسفر است.

(ب) به دلیل کم بودن نقطه‌ی جوش گاز نیتروژن، از آن برای نگهداری نمونه‌های بیولوژیک در پزشکی استفاده می‌شود.

(پ) در پتروشیمی شیراز گاز آرگون از تقطیر جزء به جزء هوای مایع با خلوص بسیار زیاد تهیه می‌شود.

(ت) یون‌های چند اتمی مانند N_2^+ نیز جزو اجزای سازنده‌ی هواکره به شمار می‌آیند.

۶۸

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اکسیژن در ساختار همه‌ی مولکول‌های زیستی مانند کربوهیدرات‌ها، چربی‌ها و پروتئین‌ها یافت می‌شود. در دو واکنش سوختن قندها همانند سوختن زغال‌سنگ، هر کدام از فراورده‌ها شامل عنصر اکسیژن نیز هستند:

بخار آب + کربن دی‌اکسید $\rightarrow$ اکسیژن + قندها

گوگرد دی‌اکسید + کربن دی‌اکسید + بخار آب $\rightarrow$ اکسیژن + زغال‌سنگ

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌های نادرست:

(۱) کربن مونوکسید از کربن دی‌اکسید ناپایدارتر است، به طوری که CO تولیدشده در سوختن ناقص در حضور اکسیژن و در شرایط مناسب دوباره می‌سوزد و به CO_۲ تبدیل می‌شود.

(۳) آرگون گازی بی‌رنگ است.

(۴) برای خنک کردن قطعات الکترونیکی در دستگاه‌های تصویربرداری مانند MRI از سبک‌ترین گاز نجیب (هلیوم) استفاده می‌شود. سبک‌ترین گاز شناخته‌شده، هیدروژن است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. به جز عبارت (آ)، بقیه‌ی عبارت‌ها درست هستند.

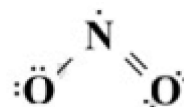
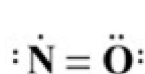
بررسی عبارت‌ها:



(آ) نمایش درست ساختار لوویس مولکول HCN به صورت مقابل است:

فراموش نکنید که در رسم ساختار لوویس، باید جفت الکترون‌های ناپیوندی نیز نمایش داده شود.

(ب) در هر کدام از دو ترکیب NO و NO_۲، اتم نیتروژن دارای آرایش ۷ تایی است:



(پ) آهک یا همان کلسیم اکسید (CaO) یک اکسید فلزی (بازی) است و مانند شربت معده، خاصیت بازی دارد.

(ت) اکسیدهای عناصر جامد گروه (۱) در واقع اکسیدهای فلزی هستند که خاصیت بازی دارند و کاغذ pH را به رنگ آبی در می‌آورند.

